Lineare Algebra
Höheres Niveau

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung
Viele Beispiele

Datei Nr. 62160

Stand 18. Mai 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Mit Matrizen kann man aus Vektoren andere Vektoren erzeugen. Dies lässt sich in der Regel als „lineare“ Abbildung eines Vektorraums auf einen (anderen oder denselben) Vektorraum interpretieren. Dabei wird die Umrechnung mit Hilfe der Matrix denkbar einfach, wenn man als Basis des Vektorraums sogenannte Eigenvektoren verwendet. Das sind Vektoren, deren Bild ein Vielfaches des Urbilds ist. In vielen Fällen wird dann die Abbildungsmatrix zu einer Diagonalmatrix. Auch Basiswechsel spielen dabei eine wichtige Rolle.

Da man lineare Abbildungen mit ihren Abbildungsmatrizen identifizieren kann, spricht man von Eigenvektoren einer Abbildung bzw. Eigenvektoren einer Matrix und meint dasselbe.

Es geht in diesem Text um die Fähigkeit, Eigenvektoren und ihre Eigenwerte von 2x2-Matrizen und 3x3-Matrizen zu berechnen. Bei einigen Matrizen treten komplexe Eigenwerte auf.

Im Folgetext 62165 werden Matrizen mit Hilfe ihrer Eigenvektoren zu Diagonalmatrizen umgeformt. Dies ist fundamental wichtig, das die Rechnung mit ihnen extrem einfach ist.

Dazu sollte man Eigenvektoren berechnen können!

Inhalt

1 Grundlagen 4

1.1 Information oder Wiederholung: Lineare Abbildungen. 4

1.2 Wichtige Eigenschaften dieser Abbildungen (Linearität, Umkehrbarkeit) 6

2 Eigenwerte und Eigenvektoren 8

2.1 Definition und Berechnungsmethode (3-Schritt-Methode) 8

2.2 Rechenbeispiele: Eigenvektoren von 2x2-Matrizen 9

Beispiel 1: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}\vec{x}$ 9

Beispiel 2: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\vec{x}$ 10

Beispiel 3: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}\vec{x}$ 11

Beispiel 4: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ 12

Beispiel 5: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$ 14

Beispiel 6: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$ (komplexe Eigenvektoren) 15

Beispiel 7: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (komplexe Eigenvektoren) 16

2.2 Rechenbeispiele Eigenvektoren von 3x3-Matrizen 17

Beispiel 8: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 17

Beispiel 9: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$ 19

Beispiel 10: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ 21

Beispiel 11: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von a 22

Untersuche 4 Fälle: $a = 1,\ a = -1,\ a = 0,\ a \notin \{1; -1; 0\}$

Beispiel 12: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit Kurzlösung 26

Beispiel 13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ mit komplexen Eigenwerten 27

3 **Einfache Theoretische Aufgaben** 19

1 Grundlagen

1.1 Information oder Wiederholung: Lineare Abbildungen

(a) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Eine lineare Abbildung f eines Vektorraums V auf sich bildet Vektoren $\vec{x}$ auf Vektoren $\vec{y}$ ab:

$$f:\ \vec{x} \to f(\vec{x}) = \vec{y}$$

$\vec{y}$ ist also das Bild von $\vec{x}$.

Abbildungen kann man durch ein Gleichungssystem beschreiben.

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \qquad (1)$$

bildet $\mathbb{R}^2$ auf sich ab.

Zahlenbeispiel: $\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

bildet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf $\vec{y} = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$ ab.

Die Vektorgleichung (1) $\vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$ kann man als System von linearen Gleichungen schreiben:

$$\begin{Bmatrix} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} \\ y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} \end{Bmatrix}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y} = A\vec{x}$$

Zahlenbeispiel: $\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

bildet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf $\vec{y} = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$ ab.

Verbindet man den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit einem Punktraum, dann entsteht ein affiner Raum.
In ihm sind solche Abbildungen bekannt als Spiegelung, Drehung, Streckung usw.

Sie werden im Text 21201 und folgende behandelt.

(b) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$

Hier besitzen die Vektoren 3 Koordinaten, weshalb die Abbildungsgleichungen so aussehen:

$$f(\vec{x})=\vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} \\ y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} \\ y_3 = x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} \end{Bmatrix}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

kurz:

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Zahlenbeispiel: Gegeben ist die Abbildung f durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung : $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

f bildet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ab auf $\vec{y} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+0 \\ 1-2+2 \\ 1+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ^

(c) Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$

Zahlenbeispiel: Gegeben ist die Abbildung f durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung : $\vec{y} = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

f bildet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab auf $\vec{y} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1-4+2-2 \\ 1+4+4 \\ -2+2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

(d) Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.2 Wichtige Eigenschaften dieser Abbildungen:

(1) Linearität

Eine Abbildung f heißt **linear**, wenn gilt:

(L1) $f(r\vec{u}) = r \cdot f(\vec{u})$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{u} \in V$

(L2) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Hinweis. Man kann (L1) und (L2) zu einer Forderung zusammenfassen:

$$f(r\vec{u} + s\vec{v}) = r \cdot f(\vec{u}) + s \cdot f(\vec{v})$$

Man kann beweisen, dass die zuvor gezeigten Abbildungen der Form

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \quad \text{oder} \quad f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 \quad \text{bzw.} \quad f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

linear sind. (Siehe Text 62201 – Lineare Abbildungen).

(2) Umkehrbarkeit

Eine quadratische Matrix heißt <u>invertierbar</u>, wenn $\det(A) \neq 0$ **ist.**

Dann kann man zu A die inverse Matrix A^{-1} berechnen.

Die inverse Matrix zu einer 2x2-Matrix berechnet man so: (Text 62102 S. 29)

Aus $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ folgt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Zahlenbeispiel:

Aus $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Die inverse Matrix zu einer 3x3-Matrix berechnet man so: (Text 62010 S. 32 ff.)

Berechne die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4 \cdot Z2 \\ \\ -2 \cdot Z2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -10 & -10 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \; 10 \cdot Z2 + 3 \cdot Z1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -10 & -10 & 1 & -4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) 2 \cdot Z1 - 5 \cdot Z3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -20 & 2 & 2 & -5 \\ 10 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-20) \\ :10 \\ :(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \to Z3 \\ \to Z1 \\ \to Z2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

Zuerst steht rechts die Einheitsmatrix, nach den Gauß-Umformungen muss sie links stehen,

Der rechte Teil ist dann die inverse Matrix: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Eine Abbildung kann man umkehren, wenn ihre Matrix invertierbar ist.

Die Matrixgleichung $\vec{y} = A\vec{x}$ multipliziert man von links mit der inversen Matrix A^{-1}:

So entsteht: $A^{-1} \cdot \vec{y} = \underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{E} \cdot \vec{x}}_{\vec{x}}$, also $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$.

Ein Beispiel aus dem Text 62201:

Die lineare Abbildung sei gegeben durch $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

Dann lautet die Umkehrabbildung: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$

Angewandt auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ bedeutet das: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{y}$

und die Umkehrung liefert: $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{x}$

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

2.1 Definition und Berechnungsmethode

Unter einem **Eigenvektor** einer Abbildung f versteht man einen Vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$, für den gilt: $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$. Der Bildvektor eines Eigenvektors ist also ein Vielfaches des Urbildes.

Der Faktor λ heißt **Eigenwert** des Eigenvektors $\vec{u}$. (λ heißt "Lambda")

Die 3-Schritt-Methode zur Berechnung

1 Aus der Abbildungsgleichung $f(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$

und der Eigenvektor-Bedingung $f(u) = \lambda \cdot \vec{u}$

folgt die Gleichung $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ (1(

Bringt man die rechte Seite in Matrixform $\vec{u} = E \cdot \vec{u}$,

dann wird (1) zu $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot E \cdot \vec{u}$.

Daraus folgt das **Eigenwertsystem** (EWS) $\boxed{(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$ (2)

Im $\mathbb{R}^2$ ist das EWS dieses Gleichungssystem:

Wegen $A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$

lautet (2) als Matrixgleichung: $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3)

bzw. als Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 = 0 \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

2 **Das EWS hat immer den Nullvektor als Lösung, man nennt ihn die triviale Lösung.**

Die Theorie der Gleichungssysteme sagt uns, dass es aber **auch** nicht-triviale Lösungen geben kann, und zwar genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ist:

$\det(A - \lambda E) = 0$. also $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ (4)

$\det(A - \lambda \cdot E)$ heißt das **charakteristische Polynom** von A und

$\det(A - \lambda E) = 0$ heißt die **charakteristische Gleichung** für A,

Aus (4) berechnet man die Eigenwerte von A.

3 Man setzt die Eigenwerte in das EWS (3) ein und berechnet daraus die zugehörenden Eigenvektoren von A.

2.2 Rechenbeispiele: Eigenvektoren von 2x2-Matrizen.

Beispiel 1: Gegeben sie die Abbildung f durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}\vec{x}$

Wir berechnen die Eigenwerte mit der 3-Schritt-Methode:

1 Aus der Bedingung für Eigenvektoren $\boxed{A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}}$ entsteht das **Eigenwertsystem EWS:**

Als Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -0{,}6 \cdot u_1 + 0{,}8 \cdot u_2 = \lambda \cdot u_1 \\ 0{,}8 \cdot u_1 + 0{,}6 \cdot u_2 = \lambda \cdot u_2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} (-0{,}6 - \lambda) \cdot u_1 + \quad 0{,}8 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}8 \cdot u_1 + (0{,}6 - \lambda) \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$$

oder mit (EWS)

Matrizenrechnung:

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \qquad *)$$

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot E \cdot \vec{u}$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 - \lambda & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 **Berechnung der Eigenwerte aus der charakteristischen Gleichung:**

Die Bedingung für nicht-triviale Lösungen heißt: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

d. h. $\begin{vmatrix} -0{,}6 - \lambda & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(0{,}8 - \lambda)(0{,}7 - \lambda) - 0{,}06 \cdot = 0$$

das ist die **charakteristische Gleichung**: $-(0{,}36 - \lambda^2) - 0{,}64 = 0$

Ihre Lösung sind die Eigenwerte von A: $-0{,}36 + \lambda^2 = 0{,}64 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda^2 = 1}$

. Die **Eigenwerte** von A sind also $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$

3 **Berechnung der zugehörenden Eigenvektoren:**

Für $\lambda_1 = 1$ lautet das EWS: $\left\{ \begin{array}{r} (-0{,}6 - 1) \cdot u_1 + \quad 0{,}8 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}8 \cdot u_1 + (0{,}6 - 1) \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$ bzw. $\left\{ \begin{array}{r} -1{,}6 \cdot u_1 + 0{,}8 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}8 \cdot u_1 - 0{,}4 \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$

Die 1. Gleichung ist ein Vielfaches der zweiten, also gibt es unendlich viele Lösungen.

Wählt man $u_1 = r, r \in \mathbb{R}$, dann folgt $u_2 = 2r$. Damit haben wir „einen“ <u>ersten Eigenvektor</u> gefunden: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix}$. Es sind alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für sie gilt: $f(\vec{u}_1) = \boxed{1} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1$

Für $\lambda_2 = -1$ lautet das (EWS): $\left\{ \begin{array}{r} (-0{,}6 + 1) \cdot u_1 + \quad 0{,}8 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}8 \cdot u_1 + (0{,}6 + 1) \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$ bzw. $\left\{ \begin{array}{r} 0{,}4 \cdot u_1 + 0{,}8 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}8 \cdot u_1 + 1{,}6 \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$

Die untere Gleichung ist das Doppelte der oberen, aus der folgt: $u_1 + 2u_2 = 0$

Wählt man $u_2 = s, \ s \in \mathbb{R}$, dann folgt $u_1 = -2s$: Eigenvektoren sind also: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}$,

d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_2) = \boxed{-1} \cdot \vec{u}_2 = -\vec{u}_2$.

Beispiel 2: Gegeben sie die Abbildung f durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\vec{x}$

Berechne die Eigenvektoren von f.

1 Aus der Bedingung für Eigenvektoren $\boxed{A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}}$ entsteht das **Eigenwertsystem EWS:**

Als Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0{,}8 \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_1 = \lambda \cdot u_1 \\ 0{,}2 \cdot u_2 + 0{,}7 \cdot u_2 = \lambda \cdot u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (0{,}8 - \lambda) \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_1 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_2 + (0{,}7 - \lambda) \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

oder mit (EWS)

Matrizenrechnung:

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \qquad *)$$

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot E \cdot \vec{u}$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 - \lambda & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 **Berechnung der Eigenwerte aus der charakteristischen Gleichung:**

Die Bedingung für nicht-triviale Lösungen heißt: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

d. h. $\begin{vmatrix} 0{,}8 - \lambda & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(0{,}8 - \lambda)(0{,}7 - \lambda) - 0{,}06 = 0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 1{,}5 \cdot \lambda + 0{,}5 = 0$

Lösungsformel: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5}}{2} = \dfrac{1{,}5 \pm 0{,}5}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0{,}5 \end{cases}$

Die **Eigenwerte** von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0{,}5$

3 **Berechnung der zugehörenden Eigenvektoren:**

Für $\lambda_1 = 1$ lautet das EWS: $\begin{Bmatrix} (0{,}8 - 1) \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + (0{,}7 - 1) \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$ bzw. $\begin{Bmatrix} -0{,}2 \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 - 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die 1. Gleichung ist ein Vielfaches der zweiten, also gibt es unendlich viele Lösungen .

Es folgt: $0{,}3 \cdot u_2 = 0{,}2 \cdot u_1 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{3} u_1$. Ich wähle $u_1 = 3r$ mit $r \in \mathbb{R}$ und erhalte $u_2 = 2r$.

Damit haben wir „einen“ <u>ersten Eigenvektor</u> gefunden: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es sind alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für sie gilt: $f(\vec{u}_1) = \boxed{1} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1$

Für $\lambda_2 = 0{,}5$ lautet das (EWS): $\begin{Bmatrix} (0{,}8 - 0{,}5) \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + (0{,}7 - 0{,}5) \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$ bzw. $\begin{Bmatrix} 0{,}3 \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + 0{,}2 \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mid :0{,}3 \\ \mid :0{,}2 \end{matrix}$

Daraus erhält man zweimal die Gleichung $u_1 + u_2 = 0$

Wählt man z. B. $u_1 = r \in \mathbb{R}$, folgt $u_2 = -r$ und wir haben als „<u>zweiten Eigenvektor</u>“:

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Auch hier sind alle Lösungen Vielfachen eines Vektors: $f(\vec{u}_2) = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot \vec{u}_2$.

Jetzt ein Beispiel mit verkürzter Lösung

Beispiel 3 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}\vec{x}$ mit der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$

$\boxed{1}$ Eigenwertsystem (EWS): $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$

$\boxed{2}$ Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ d, h, $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(4-\lambda)(11-\lambda) - 144 = 0$ bzw. $\lambda^2 - 15 \cdot \lambda - 100 = 0$

Lösungsformel: $\lambda_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{225+400}}{2} = \dfrac{15 \pm 25}{2} = \begin{cases} 20 \\ -5 \end{cases}$

$\boxed{3}$ **Berechnung der zugehörenden Eigenvektoren:**

Für $\lambda_1 = 20$ lautet das EWS: $\begin{pmatrix} 4-20 & 12 \\ 12 & 11-20 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$ Lösung nach Gauß:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-4) \\ :3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +Z1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow -4u_1 + 3u_2 = 0$$

Die 2. Gleichung ist keine Bedingung mehr, weshalb es unendlich viele Lösungen gibt.
Man kann also z. B. u_1 frei wählen. $u_1 = 3r, r \in \mathbb{R} \Rightarrow 3u_2 = 12r \Rightarrow u_2 = 4r$

Damit haben wir „einen“ <u>ersten Eigenvektor</u> gefunden: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 4r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Es sind alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Für sie gilt: $f(\vec{u}_1) = \boxed{20} \cdot \vec{u}_1$

Für $\lambda_2 = -5$ lautet das EWS: $\begin{pmatrix} 4+5 & 12 \\ 12 & 11+5 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{o}$

Lösung nach Gauß: $\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :3 \\ :4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow 3u_1 + 4u_2 = 0$

Die zweite Gleichung stellt keine neue Bedingung dar. Daher kann man etwa

$u_1 = 4r, r \in \mathbb{R}$ wählen. Das ergibt $4u_2 = -3u_1 = -12r \Rightarrow u_2 = -3r$.

<u>Zweiter Eigenvektor</u>: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4r \\ -3r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_2) = -5 \cdot \vec{u}_2$

Bemerkung zur Ausdrucksweise:

Zu jedem Eigenwert gibt es unendlich viele Eigenvektoren, die aber stets Vielfache eines Eigenvektors sind.

Wenn man also vom 1. bzw. 2. Eigenvektor spricht, meint man immer die Vielfachen eines Eigenvektors.

Jetzt ein Beispiel, das Probleme macht

Beispiel 4

Gegeben ist die Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$.

a) Man sollte zuerst die Determinante der Matrix berechnen: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$!!

Damit liegt eine <u>nicht reguläre Abbildung</u> vor: f ist nicht umkehrbar, die Matrix besitzt kein Inverses. Man kann auch schnell sehen, woran es liegt, dass f nicht umkehrbar ist:

Schreibt man die Abbildungsgleichung als Vektorgleichung, dann lautet die sie

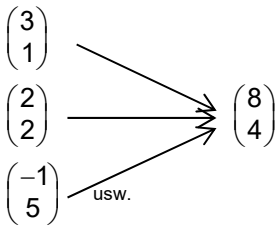
$$f(\vec{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Beispiele: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, und $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$f\left(\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$.

Hier passiert also Sonderbares:

1. Jeweils unendlich viele Vektoren (mit derselben Koordinatensumme werden auf denselben Bildvektor abgebildet. Die Abbildung ist also nicht umkehrbar, wie man sieht:



2. Vektoren,deren eine Koordinate das Negative der anderen ist, haben als Bild den Nullvektor. Man nennt Vektoren, sie auf den Nullvektor abgebildet werden den ***Kern der Abbildung***.

   Ker(f) besteht also aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\mathrm{Ker}(f) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

3. Ferner sieht man aus der Gleichung (**) , dass alle Bildvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

   Die Bildmenge von $\mathbb{R}^2$ ist daher $f(\mathbb{R}^2) = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Das Symbol $[\vec{u}]$ heißt **lineare Hülle** des Vektors $\vec{u}$ Sie besteht aus allen Vielfachen von $\vec{u}$:

Sie ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ und hat die Dimension 1, denn es gibt nur einen linear unabhängigen Vektor, z. B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren die keine Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind, kommen nicht als Bild eines Vektors vor.

b) **Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren von** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Drei-Schritt-Methode:

1 Eigenwertsystem (EWS) $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

2 Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ (Bed. für nicht-triviale Lösungen)

d. h. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

also $(2-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0$

bzw. $2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$

oder $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

Ausklammern von λ: $\lambda \cdot (\lambda - 3) = 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$

3 Eigenvektoren als Lösung des Eigenwertsystems:

Zu $\lambda_1 = 0$: EWS: $\begin{pmatrix} 2-0 & 2 \\ 1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die erste Gleichung ist das Doppelte der zweiten und daher entbehrlich.

Es gibt also nur die Bedingung $u_1 + u_2 = 0$. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

Man erhält also dazu die Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für sie gilt: $f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$. (Das wussten wir bereits.)

Zu $\lambda_2 = 3$ EWS: $\begin{pmatrix} 2-3 & 2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die erste Gleichung ist das Negative der zweiten und daher entbehrlich. Es gibt also nur die Bedingung $u_1 - 2u_2 = 0$. Wählt man $u_2 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2s$.

Man erhält also dazu die Eigenvektoren $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für sie gilt: $f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 = 3 \cdot \vec{u}_2$.

Und noch ein besonderes Beispiel:

Beispiel 5 Gegeben ist die Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$.

1 Eigenwertsystem (EWS) $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

2 Charakteristische Gleichung:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = 0$$

ergibt die doppelte Lösung $\lambda = 2$

3 Eigenvektoren als Lösung des Eigenwertsystems:

Zu $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix}$

Damit ist u_1 beliebig: Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$

Jetzt wird es schwer!

Beispiel 6 Gegeben ist die Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$.

1 Eigenwertsystem (EWS) $(A - \lambda \cdot E)\cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

2 Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

d. h. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(5-\lambda)(-1-\lambda) + 18 = 0$$

bzw. $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3i$$

Weil der Radikand negativ ist, gibt es keine reellen Eigenwerte.
Die Abbildung besitzt also außer dem Nullvektor keine Eigevektoren.

Wer jedoch mit komplexen Zahlen rechnen kann bzw. soll, findet zwei komplexe Eigenwerte:

3 **Berechnung der komplexen Eigenvektoren:**

Zu $\lambda_1 = 2+3i$: $\begin{pmatrix} 5-(2+3i) & -3 \\ 6 & -1-(2+3i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (3-3i)u_1 - 3u_2 = 0 & :3 \\ 6u_1 + (-3-3i)u_2 = 0 & :6 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} (1-i)u_1 - \quad u_2 = 0 \\ u_1 + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)u_2 = 0 \end{Bmatrix} \cdot(1-i) \quad \text{d. h.} \quad \begin{Bmatrix} (1-i)u_1 - \quad u_2 = 0 \\ (1-i)u_1 + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)(1-i)}_{-1}u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Nebenrechnung: $\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)(1-i) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i^2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = -1$ denn $i^2 = -1$.

Damit lautet das Eigenwertsystem: $\begin{Bmatrix} (1-i)u_1 - u_2 = 0 \\ (1-i)u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = (1-i)u_1$

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = (1-i)r$, dann ist $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ (1-i)r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Zu $\lambda_1 = 2-3i$: $\begin{pmatrix} 5-(2-3i) & -3 \\ 6 & -1-(2-3i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (3+3i)u_1 - 3u_2 = 0 & :3 \\ 6u_1 + (-3+3i)u_2 = 0 & :6 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} (1+i)u_1 - \quad u_2 = 0 \\ u_1 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)u_2 = 0 \end{Bmatrix} \cdot(1+i) \quad \text{d. h.} \quad \begin{Bmatrix} (1+i)u_1 - \quad u_2 = 0 \\ (1-i)u_1 + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)(1+i)}_{-1}u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Nebenrechnung: $\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)(1+i) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i^2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = -1$ denn $i^2 = -1$.

Damit lautet das Eigenwertsystem: $\begin{Bmatrix} (1+i)u_1 - u_2 = 0 \\ (1+i)u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = (1+i)u_1$

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = (1+i)r$, dann ist $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ (1+i)r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

Noch ein Beispiel mit komplexen Eigenwerten

Beispiel 7 Gegeben ist Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Eigenwertsystem (EWS) $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 0$

2 Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

Es gibt also nur zwei komplexe Lösungen, also keinen reellen Eigenwert und daher auch keinen reellen Eigenvektor.

3 Berechnung **der komplexen Eigenvektoren**:

Zu $\lambda_1 = i$: Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} -i \cdot u_1 + \quad u_2 = 0 & \mid \cdot (i) \\ -u_1 - i \cdot u_2 = 0 & \mid \cdot (-1) \end{array} \right\}$

Das führt wegen $i^2 = -1$ zu: $\left\{ \begin{array}{l} u_1 + i \cdot u_2 = 0 \\ u_1 + i \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$

Da eine Gleichung entbehrlich ist, kann man etwa $u_2 = r \in \mathbb{R}$ wählen.

Dann folgt: $u_1 = -i \cdot r$

Eigenvektoren sind dann $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -ir \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu $\lambda_2 = -i$ Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} i \cdot u_1 + \quad u_2 = 0 & \mid \cdot (i) \\ -u_1 + i \cdot u_2 = 0 & \end{array} \right\}$

Das führt wegen $i^2 = -1$ zu: $\left\{ \begin{array}{l} -u_1 + i \cdot u_2 = 0 \\ -u_1 + i \cdot u_2 = 0 \end{array} \right\}$

Da eine Gleichung entbehrlich ist, kann man etwa $u_2 = r \in \mathbb{R}$ wählen.

Dann folgt: $u_1 = i \cdot r$

Eigenvektoren sind dann $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} ir \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

2.3 Rechenbeispiele: Eigenvektoren von 3x3-Matrizen.

Beispiel 8

Gegeben ist die lineare Abbildung f durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

$\boxed{1}$ Eigenwertsystem (EWS) $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

$\boxed{2}$ Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ (Bed. für nicht-triviale Lösungen)

d. h. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Berechnung nach Sarrus: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{matrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$

Charakteristische Gleichung: $(3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

$\boxed{3}$ Eigenvektoren als Lösung des Eigenwertsystems:

Zu $\lambda_1 = 3$ gehört das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = 0$

Da die 1. Zeile keine Bedingung liefert, ist eine Variable frei wählbar:

Wähle $u_3 = r \in \mathbb{R}$. Die 3. Zeile gehört zu $u_1 + u_3 = 0$, also folgt $u_1 = -u_3 = -r$

Die 2. Zeile gehört zu $u_1 - u_2 + 2u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = u_1 + 2u_3 = -r + 2r = r$

Zugehörige Eigenvektoren sind: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sie spannen einen eindimensionalen

Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ auf, genannt der **Eigenraum** zum Eigenwert 3: $ER_{(\lambda=3)} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Er ist die Menge aller Eigenvektoren und besteht aus allen Vielfachen von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Er hat den

Basisvektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und daher die Dimension 1. Das Zeichen $[\vec{u}_1]$ bedeutet Menge aller

Vielfachen von $\vec{u}_1$ und heißt **lineare Hülle** von $\vec{u}_1$. Es gilt $f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1$.

Zu $\lambda_2 = 2$ gehört die Gleichung $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 0$. Die 3. Zeile stellt keine neue Bedingung dar.

Zeile 1 liefert $u_1 = 0$. Zeile 2: $u_1 + 2u_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 0$. u_2 unterliegt hier keiner Bedingung

Und ist daher frei wählbar, etwa $u_2 = r \in \mathbb{R}$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2$. Eigenraum $ER_{(\lambda=2)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Zu $\lambda_3 = 4$ gehört die Gleichung $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 0$. Die 1. und die 3. Zeile liefern $u_1 = 0$.

Aus der 2. Zeile folgt dann $-2u_2 + 2u_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 = u_2$. Wähle $u_3 = r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u_2 = r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_2) = 4\vec{u}_2$. Eigenraum: $ER_{(\lambda=4)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$